from 82: в виде волн $\psi = \psi_0 e^{i(\omega t - kr)}$ то получим

$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \mu^2 = 0$ $\omega \cdot \hbar = E$, $k \cdot \hbar = p$ $\rightarrow$ $\frac{E^2}{c^2} = p^2 + \mu^2 \hbar^2$ $(E^2 = p^2c^2 + m^2c^4)$

отсюда $m_\pi = \mu \hbar / c$ при $\mu^{-1} \sim 10^{-13}$ см

теория	экспер.
$m_\pi \sim 3 \cdot 10^{-25}$ г ~ 170 МэВ	135–140

т.о. π-мезон — аналог фотона в мезодинамике.

Точно также переносчиком слабого взаимодействия явл. нейтрино.

Это конец лекции 12 ... Разложение электростатического поля

Собственные колебания поля Л. 351 §...

Сейчас мы сформулируем некоторые ~~вопро~~ проблемы классической электродинамики так, как удобно для перехода к квантовой. Мы уже знаем, что любую волну, являющуюся решением однородного волнового уравнения, можно представить в виде пакета монохроматических плоских волн. А как быть с полем, созданным зарядами? В этом случае это поле не есть решение волнового ур-ния. Поэтому для плоских волн, на которые можно разложить поле зарядов, не выполняется соотношение $\omega = ck$.

В частности, если формально представить электростатическое поле в виде суперпозиции плоских волн, то частота их будет равно нулю, в то же время волновые векторы ненулевые. Пусть есть точечный заряд в точке $\vec{r}=0$. Потенциал определяется уравнением Пуассона

$$(1) \qquad \Delta\varphi = -4\pi e\,\delta(\vec{r})$$

Разложим φ в пространственный интеграл Фурье

$$\varphi(\vec{r}) = \int e^{i\vec{k}\vec{r}}\varphi_{\vec{k}}\, d\vec{k}$$

Вычисляя $\Delta\varphi$, находим $\Delta\varphi = \int(-k^2)e^{i\vec{k}\vec{r}}\varphi_k\, d\vec{k}$,

т.е. Фурье-компонента от $(\Delta\varphi)_k = -k^2\varphi_k$, но $\varphi_k = \int \frac{e^{-i\vec{k}\vec{r}}}{(2\pi)^3}\varphi(\vec{r})\,d^3r$ обратное

С другой стороны, от правой части (1) Фурье есть

$$-4\pi e\int \delta(\vec{r})e^{-i\vec{k}\vec{r}}\frac{d^3r}{(2\pi)^3} = -\frac{e}{2\pi^2} \quad \text{откуда}$$

$$(2) \qquad \varphi_k = \frac{e}{2\pi^2}\cdot\frac{1}{k^2}$$

Аналогично $\vec{E} = \int \vec{E}_k e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3k$, но $\vec{E} = -\text{grad}\,\varphi = -\text{grad}\int \varphi_k e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} =$

$= -\int i\vec{k}e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}\,\varphi_k$, т.е. $\vec{E}_k = -i\vec{k}\,\varphi_k = -\frac{i\vec{k}}{k^2}\cdot\frac{e}{2\pi^2} \to$ поле $\vec{E}_k$ направлено вдоль вектора распространения $\vec{k}$, т.е. оно продольное в отличие от электромагнитных волн в вакууме.

Собственные колебания поля

Рассм. поле в отсутствие зарядов в конечном объёме. Предполагаем что этот объём есть параллелепипед прямоугольный со сторонами A, B, C. Тогда все поле в этом пространстве можно разложить в трёхкратный ряд Фурье:

$$\vec{A}_{\vec{r}t} = \sum_{\vec{k}} A_{\vec{k}}(t)\, e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

где компоненты вектора $\vec{k}$ пробегают значения

$$k_x = \frac{2\pi}{A} n_x, \quad k_y = \frac{2\pi}{B} n_y, \quad k_z = \frac{2\pi}{C} n_z, \quad n_{x,y,z} \text{ - все целые числа}$$

Из условия вещественности вектор-потенциала $\vec{A}$ следует:

$$\vec{A}^{+} = \sum_{k} A_{k}^{+} e^{-i\vec{k}\vec{r}} \underset{k \to -\vec{k}}{=} \sum_{k} A_{-k}^{+} e^{i\vec{k}\vec{r}} = \vec{A} = \sum A_{k} e^{ikr} \Rightarrow \underline{A_{-k}^{+} = A_{k}}$$

Из условия калибровки $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ находим (и $\varphi = 0$)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \sum_{k} i\vec{k} \cdot \vec{A}_{k} e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} = 0 \quad \text{или} \quad \vec{k} \cdot \vec{A}_{k} = 0$$

т.е. поле $\vec{A}_k$ перпендикулярно направлению $\vec{k}$

Из волнового уравнения $\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \underline{\ddot{\vec{A}}_{k} + c^2 k^2 A_k = 0}$ (.

Отсюда видно, что $A_k(t) \sim A_0 e^{i\omega_k t}$, где $\omega_k = ck$

Чтобы явно выделить ~~две группы~~ волны бегущие вдоль $\vec{k}$ и ~~вдоль~~ $-\vec{k}$, перегруппируем слагаемые

$$\vec{A} = \sum_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} + a_{-\vec{k}} e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right) = \sum_{k} \left(a_{k} e^{i\vec{k}\vec{r}} + a_{k}^{+} e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right) \quad (4$$

В первом члене $e^{i(\omega_k t + \vec{k}\vec{r})}$, во 2-ом $e^{i(\omega_k t - kr)}$

т.е. каждый член есть функция от $\vec{k}\vec{r} - \omega_k t$, т.е. волна, бегущая вдоль $\vec{k}$.

Поле $\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\sum_{k}\left(\dot{a}_{k} e^{i\vec{k}\vec{r}} + \dot{a}_{k}^{+} e^{-ikr}\right) = i\sum_{k} k\left(a_{k} e^{ikr} - a_{k}^{+} e^{-ikr}\right.$

$\frac{1}{c}\dot{a}_k \sim \frac{1}{c}\omega_k a_k \sim ika_k$

... магнитное поле $H = \operatorname{rot} A$:

$$\vec{H} = \vec{\nabla}\times\sum_k\left(\vec{a}_k e^{ikr} + \vec{a}_k^{+} e^{-ikr}\right) = i\sum_k\left(\vec{k}\times\vec{a}_k e^{ikr} - (\vec{k}\times\vec{a}_k^{+}) e^{-ikr}\right).$$

Энергия $\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi}\int(E^2+H^2)dV =$

$$= \frac{1}{8\pi}(-1)\int dV\Big\{\sum_k\sum_p\Big\{k\left(a_k e^{ikr} - a_k^{+} e^{-ikr}\right)p\left(a_p e^{ipr} - a_p^{+} e^{-ipr}\right) +$$

$$+ \left[\vec{k}\times\vec{a}_k e^{ikr} - \vec{k}\times\vec{a}_k^{+} e^{-ikr}\right]\left[\vec{p}\times\vec{a}_p e^{ipr} - \vec{p}\times a_p^{+} e^{-ipr}\right]\Big\}$$

Здесь входит $\int dV e^{i(\vec{k}\pm\vec{p})\vec{r}} = \delta(\vec{k}\pm\vec{p})$, поэтому все члены с экспонентами зануляются, кроме тех, где экспоненты компенсируются, в последних пропадает зависимость от координат и интегрирование по dV дает объём V.

$$\mathcal{E} = \frac{V}{4\pi}\sum_k\left\{k^2\vec{a}_k\vec{a}_k^{+} + (\vec{k}\times\vec{a}_k)\cdot(\vec{k}\times\vec{a}_k^{+})\right\}$$

Т.к. амплитуды ~~колебаний~~ поля $\vec{a}_k \perp \vec{k}$, то $\vec{a}_k\cdot\vec{k} = 0$ и $|\vec{k}\times\vec{a}_k| = ka_k$ и $(\vec{k}\times\vec{a}_k)\cdot(\vec{k}\times\vec{a}_k^{+}) = k^2 a_k a_k^{+}$. Итак

(5) $$\mathcal{E} = \frac{V}{2\pi}\sum_k k^2 a_k a_k^{+} \equiv \sum_k \mathcal{E}_k, \quad \mathcal{E}_k = \frac{V}{2\pi}k^2 a_k a_k^{+}$$ – энергия одной плоской волны. Поскольку уравнение поля (3)

$\ddot{a}_k + \omega_k^2 a_k = 0$, где $\omega_k = ck$ совпадает с ур-нием гармонического осциллятора, то разложение (4) и (5) есть разложение поля на осцилляторы.

Гамильтонова формулировка поля

Амплитуды a_k и a_k^{+} – комплексные величины, т.е. набор двух действительных. Поэтому можно ввести две вещественные канонические переменные P_k и Q_k

$$Q_k = \alpha(a_k + a_k^{+})$$

$$P_k = \dot{Q}_k = -i\omega_k\alpha(a_k - a_k^{+})$$